

# VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

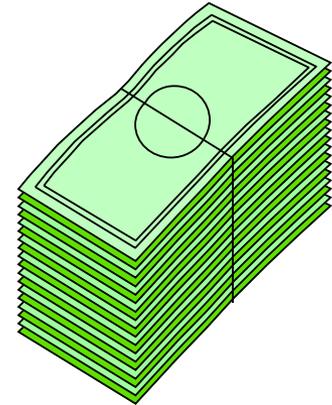
Tema 1.4

Licenciatura en Economía y Finanzas  
7<sup>o</sup> semestre.

Dr. José Luis Esparza A.

# Introducción

✘ En la empresa como en la vida personal, constantemente se deben tomar decisiones, relaciones relacionadas con el hacer o el dejar de hacer, para tomar una decisión de tal modo que la elección del curso de acción, sea el correcto.



# Matemáticas Financieras

- ✘ Constituyen un conjunto de herramientas, de métodos y procedimientos que ayudan a la toma de decisiones, en materia de obtención y uso de dinero.



# Matemáticas Financieras

✘ Las técnicas, métodos y procedimientos que serán tratados, requieren del dominio de algunos conocimientos básicos de matemáticas puras.



# Matemáticas Financiera

- A pesar, que para determinar una fórmula, se requiere utilizar los conceptos de sumatorias, progresión, geometría, aritmética. La utilización de fórmula no exige el dominio perfecto .



# Supuestos básicos de las matemáticas financiera

- Al enfrentarnos a cualquier problema financiero, el tomador de decisiones deberá tener presente los siguientes supuestos:

- 1.- Costo de Oportunidad
- 2.- Valor del dinero en el tiempo



# Costo de Oportunidad

- El problema de decisión, consiste en que para lograr un objetivo, existen varios cursos de acción alternativos, cada uno de ellos tienen sus beneficios y sus costos. El tomador de decisiones deberá elegir aquel curso de acción que le permita obtener mayores beneficios netos. Estos beneficios y costos pueden corresponder a aspectos cuantitativos como cualitativos.

# Ejemplo

Una persona desea comprar un vehículo. No tiene el dinero necesario para comprarlo al contado, por tal motivo tiene dos alternativas:

- a.- Juntar el dinero, para que en una fecha futura compre el vehículo pagándolo al contado.
- b.- Comprar hoy el vehículo a crédito, pagando cuotas mensuales durante cierto tiempo.

# Costo de Oportunidad

- Se entiende por ***Costo de Oportunidad*** los beneficios que habría generado la mejor alternativa de aquellos descartadas, producto de la elección adoptada por el tomador de decisiones.

*Siempre cuando se ha de adoptar una decisión es necesario tener presente el costo de oportunidad.*

# Valor del Dinero en el tiempo

- En la práctica, siempre es posible invertir el dinero, ya sea en un banco, en inversiones o inclusive prestárselo a algún amigo.
- En cualquiera de los casos el dinero podrá generar más dinero (intereses).
- Esto lleva a concluir que el dinero tiene distinto valor en el tiempo, o que *un peso de hoy tiene mayor valor a un peso de mañana*.

# Intereses

- Supón que tienes en tu poder cierta cantidad de dinero, supongamos \$100,000. A este dinero le puedes dar muchos usos, gastarlos o invertirlos. Cuando hablamos de invertirlo, estamos diciendo de usarlo en algo, de tal modo, de obtener alguna ganancia por ello. Si lo invertimos en un depósito bancario a 30 días. El banco por usar dinero ajeno (tu dinero), deberá pagar cierta cantidad de dinero, llamado renta o interés.

# Factores que determinan el monto del interés

- El interés acumulado ( $I$ ) por un préstamo, sin pagos intermedios, es función de cuatro funciones:
  - 1.- Capital o Principal ( $C$ ): Suma de dinero originalmente prestado o pedido en préstamo.
  - 2.- Tiempo ( $t$ ): Es el número de unidades de tiempo para el cual se calculan los intereses.

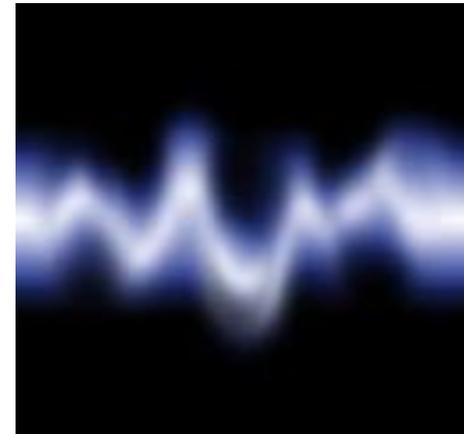
# Factores que determinan el monto del interés

3.- Tasa de interés ( $i$ ): Es el interés por unidad de tiempo, expresado como tanto por ciento o tanto por uno del capital.

La relación entre estos tres factores mencionados ( $C, t, i$ ) y el interés ( $I$ ), es siempre directa.

# Modalidad del Interés

- La cuantía del interés va a depender si la operación es a interés simple o a interés compuesto. Estas son dos modalidades de cálculo que se diferencian en la base de aplicación de la tasa de interés.



# Interés Simple

## ✖ Definición:

Cuando únicamente el capital gana interés por todo el tiempo que dura la transacción, al interés vencido al final del plazo se le conoce como interés simple. El interés simple sobre el capital  $C$ , por  $t$  años a la tasa  $i$ , esta dado por la expresión:

$$I = C * i * t$$

# Interés Simple

- En este método, la base de cálculo corresponde al capital inicial otorgado en préstamo. Los intereses que se generan no se transforman en capital, por tal motivo, los intereses resultantes para los distintos periodos de tiempo son iguales:
- Por ejemplo, si depositas \$ 200,000 al 10% anual, durante un periodo de 3 años.

# Operaciones a Interés Simple

- En esta modalidad de interés, mientras no varíe el capital pendiente de pago, durante el periodo de aplicación de la tasa de interés, el interés que se devengue por “unidad de tiempo”, en ese periodo, será siempre el mismo.
- Si recuerdas en el ejemplo anterior, el capital solicitado en préstamo era de \$200,000, la tasa de interés aplicada para un periodo de un año era de un 10 % y el tiempo de uso del dinero, 3 años.
- $C = \$ 200,000$
- $i = 10\%$  anual
- $t = 3$  años

# Operaciones a Interés Simple

- Como la tasa de interés corresponde a un periodo de un año, durante el tiempo de uso del dinero de 3 años, habrá tres periodos de generación de intereses ( $n = 3$ ). Si la tasa de interés se hubiese pactado mensualmente,  $n$  sería 36, porque en un periodo de tres años se producirían 36 periodos mensuales de generación de intereses. Es decir  $n$  es el número de periodos de generación de intereses en el tiempo de uso del dinero. Por lo tanto, de ahora en adelante solo usaremos  $n$ .

# Interés Simple Acumulado

- Siguiendo con el problema anterior, el interés para un año es de \$ 20,000, el interés acumulado hasta el segundo año es de \$ 40,000, y el interés acumulado hasta el tercer año es de \$ 60,000.

Interés acumulado al primer año:

$$\$ 20,000 ( 20,000 \times 1 ) \mathbf{C \times i \times 1}$$

Interés acumulado al segundo año:

$$\$ 40,000 ( 20,000 \times 2 ) \mathbf{C \times i \times 2}$$

Interés acumulado al tercer año:

$$\$ 60,000 ( 20,000 \times 3 ) \mathbf{C \times i \times 3}$$

# Interés Simple Acumulado

- Por lo tanto, si se quiere determinar el interés acumulado para  $n$  periodos, el interés que genere el capital, para un periodo ( $C \times i$ ), se debe multiplicar por el número de periodos ( $n$ )

$$I = C \times n \times i$$

Aplicando la fórmula en el problema. Si deseamos invertir el capital por un periodo de tres años, el interés resultante ascendería a :

$$I = 200,000 \times 3 \times 0.10$$

$$I = \$ 60,000$$

# Interés Simple Acumulado

- La presente fórmula nos permite determinar el interés acumulado para cualquier tiempo. Pero además, conociendo el interés acumulado es posible determinar:
  - a.- El **tiempo** necesario para generar dicho interés (conociendo el capital y la tasa de interés pactada);
  - b.- La **tasa de interés** necesaria para generar dicho interés (conociendo capital y número de periodos de uso del dinero);
  - c.- El **capital** o principal necesario para generar dicho interés (conociendo  $i$  y  $n$ ).

# Interés Simple Acumulado

- Debes tener presente, que siempre el tiempo de la tasa de interés debe coincidir con el tiempo que indica **n**. Es decir, si la tasa de interés es anual, los periodos de uso del dinero (**n**) deben ser anuales. Si **i** es mensual, **n** debe ser también mensual.
- $T_{ef} = (T_{nom} * n) / 360$
- $T_{nom} = (T_{ef} * 360) / n$

# Ejercicio N° 1

- Juan Pérez solicita en préstamo \$ 300,000 a una tasa de interés del 2.2% mensual.
  - a.- Determina el interés acumulado para un periodo de:
    - 3 meses
    - 9 meses
    - 2 años
    - 2 años y 5 meses.
  - b.- Determina el interés acumulado para un año, si la tasa de interés es de un 6 % semestral.

# Ejercicio N°1

- c.- ¿Qué cantidad de dinero deberá invertir para que en un lapso de 10 meses, se genere un interés de \$18,000?
- d.- ¿Cuál deberá ser la tasa de interés mensual para que en un plazo de 2 años, el interés resultante sea la cuarta parte del capital inicial.
- e.- Determina el interés que genera la obligación durante el 5<sup>o</sup> mes.

# Respuesta

**a.-**  $C = \$ 300,000$   $i = 2.2\%$  mensual

3 meses  $I = 300,000 \times 0.022 \times 3 = \$ 19,800$

9 meses  $I = 300,000 \times 0.022 \times 9 = \$ 59,400$

2 años  $I = 300,000 \times 0.022 \times 24 = \$ 158,400$

2 años, 5 meses  $I = 300,000 \times 0.022 \times 29 = \$ 191,400$

# Respuesta

**b.-**  $c = 300.000$   $I = C \times n \times i$

$i = 6\%$  semestral  $I = 300,000 \times 0.06 \times 2$

$t = 1$  año  $I = \$ 36,000$

$n = 2$  semestres

**c.-**  $C = ?$

$I = \$ 18,000$

$i = 2.2\%$  mensual

$n = 10$

$18,000 = C \times 10 \times 0.022$

$18,000 / (10 \times 0.022) = C$

$\$ 81,818 = C$

# Respuesta

**d.-**

$$i = ?$$

$$I = C/4$$

$$n = 2 \text{ años (24 meses)}$$

$$C/4 = C \times i \times 24$$

$$0.25 C = C \times i \times 24$$

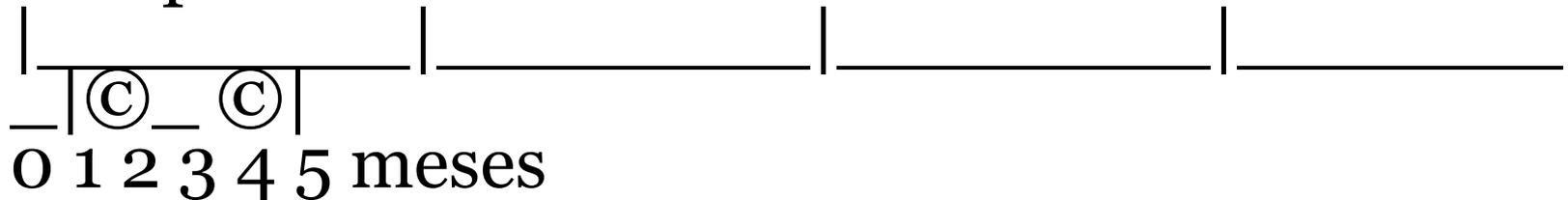
$$0.25 = C \times i \times 24 / C$$

$$I = 0,25 = 24 \times i$$

$$i = 1.0417\%$$

# Respuesta

e.- Se pide:



Para responder la pregunta, puedes abordar el problema de la siguiente manera:

Como en interés simple, los intereses para los distintos periodos de uso del dinero son iguales, y el interés para el primer mes es de \$ 6,600 ( $300,000 \times 0.022$ ), el interés para el quinto mes será también de \$ 6,600.

# Monto a Interés Simple

- Tomando el ejemplo inicial de los \$100,000, la cantidad de dinero que tu retiras del banco al cabo de un mes, es decir, el dinero depositado (  $C$  ) más los intereses (  $I$  ) generados durante ese mes, o sea, \$ 101,000, recibe el nombre de Monto de un capital o deuda.
- Por lo tanto, el **monto de una deuda (  $M$  ) a una fecha dada, corresponde al capital inicial más los intereses acumulados a esa fecha, es decir:**

$$M = C + I$$

# Monto a Interés Simple

- Como el interés, según método de interés simple, se obtiene a través de la fórmula:

$$I = C \times i \times n$$

Si reemplazamos la fórmula de interés en la fórmula de monto:

$$M = C + C \times i \times n / \text{Factorizando por } C$$

$$M = C ( 1 + i \times n )$$

donde.

M = Monto a interés simple

C = Capital inicial

n = Número de periodos de uso del dinero  
(Determinado por el tiempo que indica la tasa de interés)

i = Tasa de interés

# Ejemplo:

- Recordando, el problema anterior consistía en un préstamo de \$ 300,000, a una tasa de interés del 2.2% mensual.
- Si te piden que determines el monto a un año. Te están solicitando que al capital inicial le agregas los intereses que genera ese capital durante el periodo de un año (12 meses).

# Ejemplo:

- El interés para un año lo obtenemos de la siguiente manera:

$$I = 300,000 \times 0.022 \times 12 = \$ 79,200$$

Si al capital de \$ 300,000 le sumamos los intereses acumulados por un año (\$79,200), obtenemos un monto de \$ 379,200.

Aplicando la fórmula de monto a interés simple:

$$M = C ( 1 + n \times i )$$

$$M = \$ 300,000 ( 1 + 0.022 \times 12 )$$

$$M = \$ 379,200$$

# Interés Compuesto

- Esta modalidad de cálculo de interés consiste, en que el interés que genera el capital para un periodo de tiempo se capitaliza, es decir, se transforma en capital. Por lo tanto, para el periodo siguiente, el capital relevante será el capital inicial más el interés resultante del primer periodo, generando con ello, un interés mayor en el segundo periodo, el cual también se capitaliza.

# Operaciones a Interés Compuesto

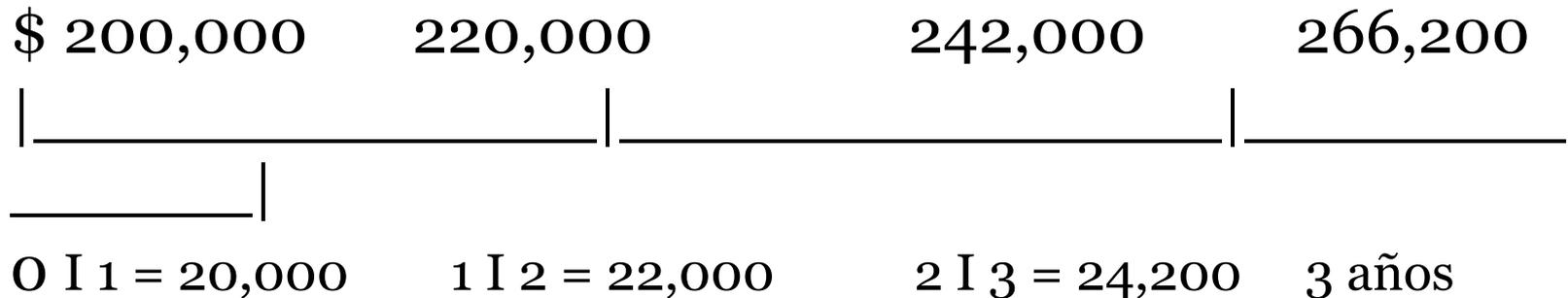
- Como hemos visto anteriormente, hablamos de Interés Compuesto, cuando los intereses se capitalizan, cuando el capital relevante para cada periodo de uso del dinero es distinto (generalmente mayor, producto de la capitalización de los intereses), y cuando los intereses resultantes, también son mayores.
- En esta modalidad de cálculo de interés existen algunas expresiones relacionadas, tales como:

# Operaciones a Interés Compuesto

- ***Capitalización de intereses:*** Es el proceso de agregar a un capital, los intereses simples de los periodos de uso del dinero, entre la fecha en que se formó ese capital y la fecha elegida para agregar intereses.
- ***Periodo de capitalización:*** Es el intervalo de tiempo convenido para capitalizar los intereses (meses, trimestres, años, etc.).

# Interés Compuesto

- Supongamos que el problema anterior, se pactó a interés compuesto.



# Interés Compuesto

- | <b>PERIODO</b> | <b>CAPITAL<br/>CAPITAL<br/>INICIAL (C)<br/>ACUMULADO</b> | <b>INTERES (I)<br/><math>C \times i</math></b> |           |
|----------------|--|--|-----------|
| <b>1</b>       | <b>\$ 200,000</b>  | <b>\$20,000</b>                                | <b>\$</b> |
| <b>220,000</b> |  |  |           |
| <b>2</b>       | <b>\$ 220,000</b>  | <b>\$22,000</b>                                | <b>\$</b> |
| <b>242,000</b> |  |  |           |
| <b>3</b>       | <b>\$ 242,000</b>  | <b>\$24,200</b>                                | <b>\$</b> |
| <b>266,200</b> |  |  |           |

# Operaciones a Interés Compuesto

- ***Tasa de interés compuesto:*** Es la tasa de interés por periodo de capitalización
- ***Frecuencia de capitalización:*** También llamado periodo de capitalización o de conversión. Es el número de veces en que se capitalizan los intereses en el tiempo de uso del dinero.

Basémonos en el siguiente ejemplo para entender el concepto de interés compuesto.

# Ejemplo:

- Un préstamo por \$ 120,000 a 3 años plazo, otorgado a una tasa de interés del 18 % anual, con capitalización anual. Identifica :

1.- Tiempo de uso del dinero

2.- Período de capitalización

3.- Frecuencia de capitalización

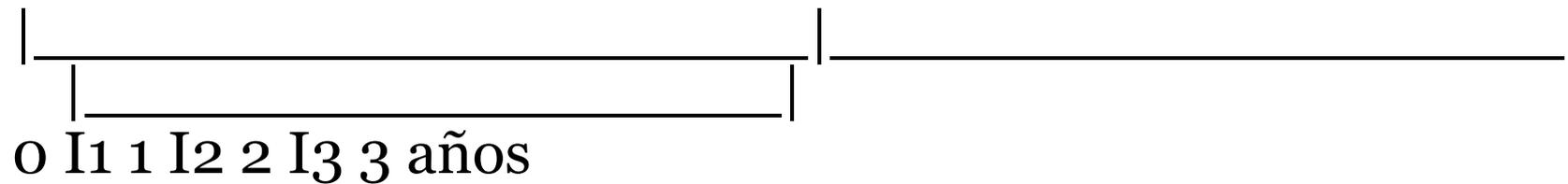
# Respuesta

a.- 3 años

b.- anual

c.- 3

$$120.000 M_1 = C_1 M_2 = C_2 M_3 = C_3$$



$i = 18\%$  anual con capitalización anual

$$I_1 = C_0 \times n \times i \quad (n = 1)$$

$$I_1 = 120,000 \times 0.18 = \$ 21,600$$

$$M_1 = C_0 + I_1$$

$$M_1 = 120,000 + 21,600 = \$141,600$$

$$I_2 = C_1 \times n \times i \quad (n = 1)$$

$$I_2 = 141,600 \times 0.18 = \$ 25,488$$

# Respuesta

$$M_2 = C_1 + I_2$$

$$M_2 = 141,600 + 25,488 = \$ 167,088$$

$$I_3 = C_2 \times n \times i \quad (n = 1)$$

$$I_3 = 167,088 \times 0.18 = \$ 30,076$$

$$M_3 = C_2 + I_3$$

$$M_3 = 167,088 + 30,076 = \$ 197,164$$

En el presente ejemplo, las capitalizaciones de los intereses son anuales, por lo tanto, en el tiempo de uso del dinero de 3 años, existen 3 periodos de capitalización (  $n = 3$  dado que la tasa de interés es anual).

# FÓRMULAS

En la práctica, cada vez es menos usual encontrar la aplicación de estos conceptos con la fórmula:

$$\mathbf{MC = C (1 + i)^n}$$

Y más frecuente su manejo con la fórmula:

$$\mathbf{VF = VP (1 + i)^n}$$

En donde el monto compuesto se transforma en valor futuro y el capital en valor presente.

A partir de esta fórmula se obtiene la de valor presente:

$$\mathbf{VP = VF / (1 + i)^n \quad \text{o} \quad \mathbf{VP = VF (1 + i)^{-n}}$$

# FÓRMULAS

TNOM= Tasa nominal

$$\text{TNOM} = (\text{TEF} * 360) / n$$

TEF= Tasa efectiva

$$\text{TEF} = (\text{TNOM} * n) / 360$$

TEFA= Tasa efectiva anual

$$\text{TEFA} = [(1 + \text{TEF})^{360/n} - 1] * 100$$

TEQ= Tasa equivalente

$$\text{TEEQ} = [(1 + (\text{TNOM} * n / 360))^{m/n} - 1] * (360 / m)$$

# FÓRMULAS

## FÓRMULA GENÉRICA PARA TASAS EFECTIVAS CUANDO CAMBIAN DE PLAZO

$$\text{TEF} = [(1+i)^{m/n} - 1] * 100$$

- i= tasa efectiva inicial  
m= plazo final o meta  
n= plazo inicial

# ANUALIDADES

- Cantidad igual que se presenta en forma consecutiva de manera periódica.
- Pueden darse al principio de cada periodo y se denominan anticipadas (pagos de renta a principio de periodo, depósitos en un fondo de ahorro).
- Pueden darse al final de cada periodo y se denominan vencidas (pagos préstamo bancario, pagaré por compra de autos).
- Las anualidades pueden referirse al valor presente o al valor futuro.

# FÓRMULAS DE ANUALIDADES

Anualidades vencidas:

$$VP = A \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = VP \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$VF = A \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A = VF \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

# FÓRMULAS DE ANUALIDADES

Anualidades anticipadas:

$$VP = A \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)$$

$$A = VP \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \frac{1}{(1+i)}$$

$$VF = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)$$

$$A = VF \frac{i}{(1+i)^n - 1} \frac{1}{(1+i)}$$

# ANÁLISIS DE INVERSIONES

- × Las empresas invierten en distintos activos reales
- × Activos pueden ser de diferentes tipos:
  - + Activos tangibles o físicos (maquinaria, edificios)
  - + Activos intangibles (contratos de gestión, Patentes)
  - + Activos financieros (acciones, bonos)
- × Objetivo de la decisión de inversión es encontrar activos cuyo valor supere su costo.
- × Dado lo anterior surge la necesidad de valorar adecuadamente los activos.
- × Si existe un buen mercado para un activo el valor será exactamente su precio de mercado.

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

- ✘ Valor Presente Neto(VPN)
- ✘ Tasa interna de Rendimiento(TIR)
- ✘ Índice de Valor Presente Neto (IVP)
- ✘ Valor Actual Neto (VANE)
- ✘ Período de Recuperación de la Inversión (PRI)
- ✘ Tasa promedio de Rendimiento Contable (TPRC<sub>9</sub>)

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

## ✦ Valor Presente Neto(VPN)

Es la diferencia entre el valor presente de ingresos menos el valor presente de egresos.

$$VPN = \frac{FI_1}{(1+i)^1} + \frac{FI_2}{(1+i)^2} + \frac{FI_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{F_i_n}{(1+i)^n} - FE_0$$

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

- ✘ Tasa interna de Rendimiento(TIR)

Es la tasa de rendimiento o rentabilidad de un proyecto. Matemáticamente es la tasa en la cual el VPN es igual a cero.

TIR= Misma fórmula que VPN pero con incógnita  $i$ , e igualando a CERO.

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

- ✘ Índice de Valor Presente Neto (IVP)

Es el cociente de dividir el Valor presente de ingresos entre valor presente de egresos.

$$\text{IVP} = \frac{\text{VPI}}{\text{VPE}}$$

o

$$\text{IVP} = 1 + \frac{\text{VPN}}{\text{VPE}}$$

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

## ✦ Valor Actual Neto (VANE)

Es el valor anual neto igual que representaría el VPN llevado por anualidades a cada año.

$$\text{VANE} = \text{VPN} * \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

- ✘ Período de Recuperación de la Inversión (PRI)

Se suman los ingresos o flujos de efectivo del proyecto y se determina el periodo en el cual compensan a los egresos.

# EVALUACIÓN DE INVERSIONES

## ✖ Tasa Promedio de Rendimiento Contable (TPRC)

Es el cociente de dividir los flujos de efectivo neto entre la inversión promedio.

$$\text{TPRC} = \frac{\text{Flujos de efectivo neto}}{\text{Inversión promedio}}$$

# CRITERIOS DE ACEPTACIÓN O RECHAZO

| VPN  | $\geq 0$<br>$< 0$                                   | Se acepta<br>Se rechaza |
|------|---|-------------------------|
| IVP  | $\geq 1$<br>$< 1$                                   | Se acepta<br>Se rechaza |
| VANE | $\geq 0$<br>$< 0$                                   | Se acepta<br>Se rechaza |
| TIR  | $\geq$ Tasa costo capital<br>$<$ Tasa costo capital | Se acepta<br>Se rechaza |

# ANÁLISIS DE INVERSIONES

## **Ejemplo:**

Se desea abrir un restaurante, para lo cual se requiere de una inversión de \$600,000 correspondiente a remodelación, equipo y capital de trabajo. Las utilidades netas estimadas son de \$150,000 anuales en un plazo de 5 años. La depreciación del equipo se maneja por línea recta. La tasa del costo de capital es del 25%.

Se pide: analizar la viabilidad de llevarse a cabo a través del cálculo de VPN, PRI, IVP, VANE y TIR.

# ANÁLISIS DE INVERSIONES

## Solución:

### Cuadro de flujo de efectivo

| -   | Periodo | +                 |
|-----|---------|-------------------|
| 600 | 0       |                   |
|     | 1       | $150 + 120 = 270$ |
|     | 2       | $150 + 120 = 270$ |
|     | 3       | $150 + 120 = 270$ |
|     | 4       | $150 + 120 = 270$ |
|     | 5       | $150 + 120 = 270$ |

Desembolso de efectivo

Utilidad neta

Depreciación

Flujo neto de efectivo (ingresos)



FIN....